Stefan Hasler / Dominik Nowak

Aufgabe 11, Potenzreihenansatz in linearen Differentialgleichungen

Gegeben sei folgende lineare homogene Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung (Schrödinger-Gleichung für zwischenmolekulare Wechselwirkung):

$$y''(x) + \frac{1+x}{x^2} y'(x) - \frac{a}{x^2} y(x) = 0 \qquad (1)$$

Durch das Einsetzen des Ansatzes $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ bekommt man folgenden Ausdruck:

$$y(x) = 1 + ax + \frac{1}{2!} a(a-1)x^2 + \frac{1}{3!} a(a-1)(a-2^2)x^3 + \frac{1}{4!} a(a-1)(a-2^2)(a-3^2)x^4 + \cdots \qquad (2)$$

Lösung

a) Kann die DGL (1) Polynome als Lösung haben? Wenn ja, für welche Parameter $\boldsymbol{a}$?

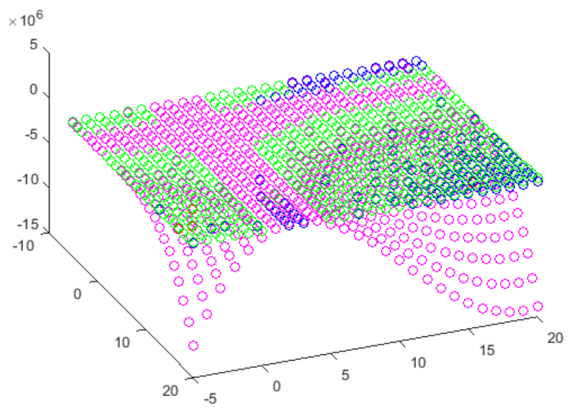
Ja! Nach Kapitel VIII S.32 im Stammbach Teil C lassen sich die Lösungsfunktionen linearer homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung als Potenzreihen mit Mittelpunkt x_0 entwickeln, falls die Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung ebenfalls eine Potenzreihenentwicklung im Punkt x_0 zulassen.

Dies ist in diesem Beispiel möglich. Nach der Multiplikation der Gleichung (1) mit x^2 wird dies deutlich:

$$x^2 y''(x) + (1+x)y'(x) - ay(x) = 0 \qquad (3)$$

Alle Koeffizientenfunktionen können mittels einer Potenzreihe dargestellt werden. Ausserdem ist a als Parameter unabhängig von x und dieser Ansatz gilt für alle Parameterwerte.

b) Benutze die Formel (2), um mit dem Taschenrechner Näherungswerte für Funktionswerte von $\boldsymbol{y}$ zu erhalten (z.B. $\boldsymbol{y(4)}$). Untersuche besonders den Einfluss von $\boldsymbol{a}$ und der Ordnung, bei der man die Reihe abbricht, auf das Ergebnis. Was stellst du fest?



Betrachtet man in einem Plot die angenommen Werte, so werden verschiedene Unterschiede in den einzelnen Grössenordnungen der Funktionen sichtbar.

Mit Hilfe eines plotfähigen Taschenrechners (MATLAB) wird ersichtlich, dass sich der Funktionswert für betragsmässig kleine a kaum verändert, aber es ist auch ersichtlich, dass die Änderung zunimmt, wenn n für y(n) steigt. Ist aber durch y(n) eine Abweichung vorhanden, wird sie durch den Betrag von a verstärkt.

Fazit: Die Grössenordnung trägt mehr zu einer besseren Näherung bei als das a.

c) Berechne den Konvergenzradius der Reihe (2). Was ist der Zusammenhang mit a) und b)?

Mithilfe der Formel für den Konvergenzradius lässt sich berechnen:

$$\frac{1}{R} = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{c_{j+1}}{c_j}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{\frac{a-j^2}{j+1}c_j}{c_j}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{a-j^2}{j+1}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{a-1}{1+j}+1-j\right| = \infty$$

Die Reihe konvergiert also lediglich im Entwicklungspunkt x_0. Das heisst, dass mit beliebigen $x \neq x_0$ keine Präzise Aussage über den Verlauf der Lösungsfunktion gemacht werden kann.